

APENDICE

1. El proceso de maximización bajo los sistemas de aparcería y de hacienda

El proceso maximizador del propietario de la tierra en un sistema de aparcería ha sido analizado por numerosos autores⁹⁸. Una solución es presentada en el diagrama del gráfico 7. Suponiendo que las tierras del propietario fueron de una determinada extensión, al aplicárseles el trabajo, la curva del producto marginal resultante será AB. La paga rural vigente es OW. Las condiciones de aparcería ofrecidas por el propietario debían posibilitar a los arrendatarios obtener ingresos como si se les estuviese dando la paga vigente. Si seguimos la hipótesis de Chung, de que los aparceros trataban con un solo propietario y no realizaban ningún trabajo adicional remunerado, entonces los arrendatarios se veían enfrentados a una situación cuya única alternativa era la de aceptar o rechazar lo ofrecido. Bajo estas condiciones, los beneficios del propietario eran maximizados si lograba asegurarse una fuerza laboral total de OL. El ingreso total del arrendatario equivale a OLBW, quedando como utilidades para el propietario ABW.

Para asegurarse esta utilidad, el propietario no ofrece una paga sino una parcela de cierta extensión y un contrato de arrendamiento. Fija la extensión de la parcela hasta que la fuerza laboral equivalga a OL. Entonces propone una participación tal en la producción DA/OA, que el conjunto de los aparceros en sus tierras recibirán ABCD ($DA/OA = CB/LB$). Pero, si el terrateniente ha hecho sus cálculos correctamente, $ABCD = OLBW$ y la utilidad será $ODCL = ABW$.

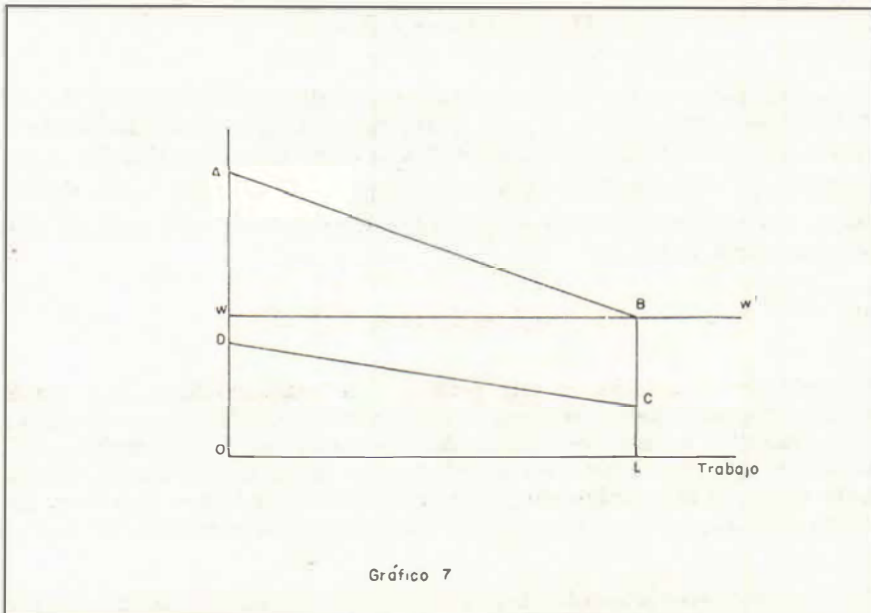


Gráfico 7

Resumiendo lo dicho, el terrateniente maximiza sus utilidades al manipular: 1º la extensión de las parcelas (ej.: la fuerza laboral necesaria) y 2º por la repartición de la renta, sujeta al constreñimiento de la paga rural. Simbólicamente, su proceso maximizador es:

$$\text{Max } \pi = (1 - s)f(L)$$

$$\text{Sujeto a: } wL = sf(L),$$

donde π = utilidad; s = la participación del arrendatario en la renta; f = la función de la producción homogénea lineal por una cantidad fija de tierra; w = la paga rural vigente, y L = el total de la fuerza laboral⁹⁹.

El proceso de maximización del terrateniente en el modelo de hacienda presentado en este artículo es prácticamente idéntico. El hacendado maximiza sus utilidades mediante la manipulación de: 1º la extensión de las parcelas del minifundio, y 2º el salario dado por la hacienda, sujetos a la limitación de que el ingreso del campesino debe ser igual al de subsistencia. En términos matemáticos:

$$\text{Max } = (H - w) (\bar{L} - L_m)$$

Sujeto a :

$$(1) \quad Q_m = f(L_m, D_m)$$

$$(2) \quad f_L = w$$

$$(3) \quad Q_m + w(\bar{L} - L_m) = S,$$

en que w equivale a la paga de la hacienda, \bar{L} , del total de la mano de obra en términos cuantitativos; Q_m , L_m , y D_m corresponden a: la producción, el trabajo y la tierra de los minifundios; f , a la función de la producción del minifundio, f_L , al producto marginal del trabajo, y S , al ingreso de subsistencia. Las ecuaciones (1) y (2) pueden ser contenidas en la (3) a fin de obtener una nueva ecuación:

$$(4) \quad f(L_m, D_m) + f_L(L - L_m) = S$$

Sin embargo, la solución a este problema de maximización puede presentar dificultades. Primero, si la curva del producto marginal del minifundio se vuelve negativa en algunos valores de L , entonces es muy probable que el rectángulo que representa las utilidades sea maximizado, cuando el producto marginal del minifundio y la paga de la hacienda son negativos. Condiciones no negativas son necesarias para evitar tal resultado sin sentido.

99. Las condiciones principales de la solución, se encuentran en Chung, 1969, págs. 20-21.

Las ecuaciones (3) y (4) también se expresan mejor como desiguales: el ingreso del campesino no puede ser menor, pero sí podría ser mayor que el de subsistencia. Desafortunadamente estas diferencias en las ecuaciones convierten la solución en un difícil problema de programación no-lineal.

2. Una solución simplificada según la función de producción de Cobb-Douglas

Se pueden evitar algunas dificultades en los cálculos con el buen uso de la función de producción del minifundio, según el esquema de Cobb-Douglas. Se elimina inmediatamente el problema negativo concerniente a los pagos de la hacienda, ya que la curva del producto marginal representada según la función de Cobb-Douglas es convexa en la parte inferior, asintótica hacia el eje horizontal, y por lo tanto, nunca es negativa. La función también posee la virtud de ser relativamente simple para trabajarla.

Supóngase entonces que las limitaciones al problema de maximización puedan ser representadas así:

$$(1a) \quad Q_m = L_m^\alpha D_m^{1-\alpha}$$

$$(2a) \quad f_L = w = \alpha D_m^{1-\alpha} L_m^{\alpha-1}$$

$$(4a) \quad L_m^\alpha D_m^{1-\alpha} + \alpha D_m^{1-\alpha} L_m^{\alpha-1} (\bar{L} - L_m) = \bar{S}$$

Podemos eludir un derivado de las condiciones principales —que debe equivaler a qué en el margen—, a fin de maximizar los beneficios puesto que es de gran importancia la forma que adopte la función que relaciona la utilidad total de la hacienda con la mano de obra y la tierra destinada a los minifundios. Es decir, queremos señalar a π como una función de D_m o L_m . Empezaremos por relacionar los beneficios con la fuerza laboral del minifundio (L_m), ya que esto significa una tarea menos ardua.

Primero, las unidades de medición utilizadas para la fuerza de trabajo, la producción agrícola, y el ingreso, han sido escogidas de tal forma que \bar{S} y \bar{L} equivalen a la unidad. Por lo tanto, L_m nos da el porcentaje del total de la fuerza de trabajo destinada a la producción del minifundio. Entonces, si se reordena la ecuación (4a) como una función explícita de D_m , se obtiene:

$$(5) \quad D_m^{1-\alpha} = \frac{1}{L_m^\alpha + \alpha L_m^{\alpha-1} - \alpha L_m^\alpha}$$

y al sustituir las ecuaciones (2a) y (5) por la función de los beneficios:

$$(6) \quad \pi = \left(H - \frac{\alpha}{L_m + \alpha - \alpha L_m} \right) (1 - L_m)$$

La ecuación (6) muestra claramente el beneficio de la hacienda correspondiente a los valores extremos de L_m . Cuando $L_m = 1$, todo el trabajo se

halla dedicado a la producción del minifundio, y por lo tanto, no hay beneficios. Cuando $L_m = 0$, $\pi = H-1$, entonces los beneficios serán positivos, si la curva H se encuentra por encima del salario de subsistencia. Este último ejemplo representa el caso de la plantación.

Para hallar el trazo de la curva de los beneficios para los valores de L_m entre 0 y 1, hemos insertado unos cuantos valores especiales de L_m en la ecuación (6) y además hemos buscado el máximo beneficio mediante la conversión del derivado parcial en cero. El resultado de este cambio sería la siguiente ecuación cuadrática en L_m :

$$(7) \quad \frac{\partial \pi}{\partial L_m} = (1 - \alpha)^2 H L_m^2 + 2\alpha (1 - \alpha) H L_m + (\alpha^2 H - \alpha) = 0.$$

Como L_m tiene que ser positivo, entonces sólo es necesario considerar la raíz positiva. Ejemplo:

$$(8) \quad L_m = \frac{-\alpha H + \alpha^{1/2} H^{1/2}}{(1 - \alpha) H}$$

Los valores que resultan por la maximización de los beneficios de L_m se encuentran en la tabla 2, junto con otros valores escogidos arbitrariamente entre 0 y 1. Las curvas resultantes han sido dibujadas en el gráfico 8 cuando $\alpha = 0.5$. (Ver págs. 49 y 50).

Las ecuaciones (2a) y (5) indican que la tierra destinada al minifundio (D_m) y que la paga de la hacienda (w) se hallan únicamente determinadas por L_m y α . La tabla 3 muestra los valores de esta tierra y paga para los mismos valores de L_m y α utilizados en la tabla 2.

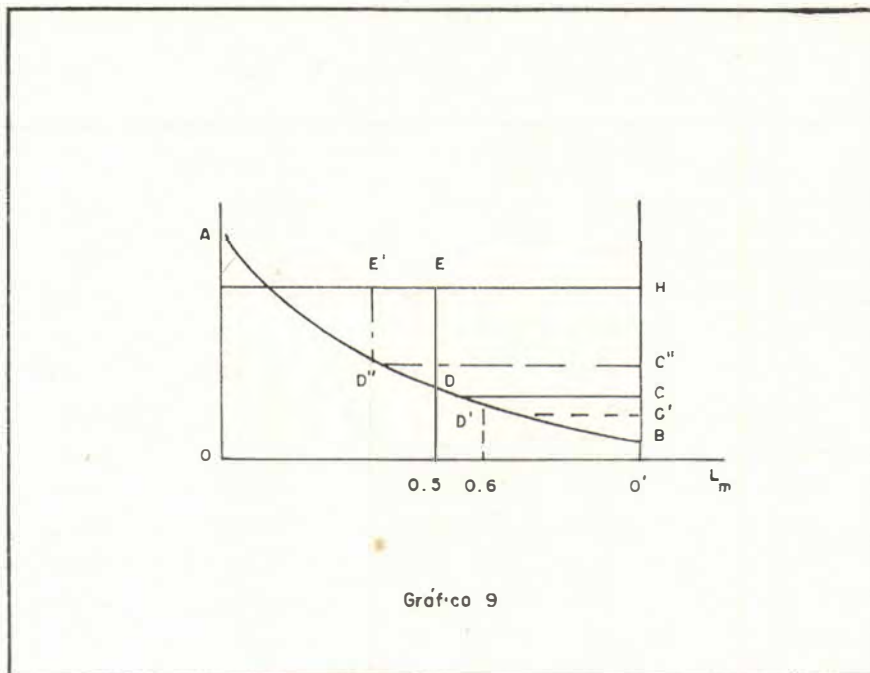
Los trazos de todas estas curvas satisfacen más o menos las expectativas. Aquellas del gráfico 8 muestran claramente como los numerosos resultados optimizadores dependen de la altura de la curva H en relación al salario de subsistencia por unidad. Si resulta $H \geq 2.0$, la hacienda se convierte en una plantación, con el beneficio maximizado en una solución angular en que $L_m = 0$.

Si resulta $0.5 < H < 2.0$, la hacienda obtiene un beneficio en circunstancias en que la plantación no podría. Sin embargo, si resulta $H \leq 0.5$, la hacienda no puede obtener utilidades y toda la mano de obra sería dedicada a los minifundios. La hacienda dejaría de existir. Dentro del área de la hacienda de $0.5 < H < 2.0$, mientras más elevada sea la curva H , más bajos resultarán los valores de L_m y D_m en el máximo del beneficio. Una elevación en la curva H provee un incentivo para que el tamaño del minifundio (D_m) sea reducido, pero los pagos de la hacienda deben ser elevados. Cuando L_m y D_m son reducidos a cero, la hacienda se ha convertido en plantación y por lo tanto debe pagar un salario de subsistencia completo ($w = 1.0$). Sin embargo en los casos en que la hacienda continúa existiendo, siempre paga menos que el salario de subsistencia, el ínfimo límite salarial, curiosamente suficiente, siendo igual al rendimiento de la elasticidad de la mano de obra (α) en la función de la producción.

Tabla 2

Valores de π para L_m , H, y α

$\alpha = 0.5$						$\alpha = 0.75$					
	H = 0.5	0.75	1.0	1.25	2.0		0.5	0.75	1.0	1.25	2.0
$L_m = 0$	-0.5	-0.25	0	0.25	1.0	$L_m = 0$	-0.5	-0.25	0	0.25	1.0
0.1	-0.368	-0.143	0.082	0.307	0.982	0.1	-0.421	-0.196	-0.029	0.254	0.929
0.2	-0.267	-0.067	0.133	0.333	0.933	0.2	-0.350	-0.150	0.050	0.250	0.850
0.3	-0.188	-0.013	0.162	0.337	0.862	0.3	-0.286	-0.111	0.064	0.239	0.764
0.4	-0.129	0.021	0.171	0.321	0.771	0.4	-0.229	-0.079	0.071	0.221	0.671
0.5	-0.083	0.042	0.167	0.292	0.667	0.5	-0.179	-0.054	0.071	0.196	0.571
0.6	-0.050	0.050	0.150	0.250	0.550	0.6	-0.133	-0.033	0.067	0.167	0.467
0.7	-0.026	0.049	0.124	0.199	0.424	0.7	-0.093	-0.018	0.057	0.132	0.357
0.8	-0.011	0.039	0.089	0.139	0.289	0.8	-0.058	-0.008	0.042	0.092	0.242
0.9	-0.003	0.023	0.047	0.072	0.147	0.9	-0.027	-0.002	0.023	0.048	0.123
1.0	0	0	0	0	0	1.0	0	0	0	0	0
beneficio máximo						beneficio máximo					
0					1.0	(-0.551)					(1.202)
0.264				0.338		0.099				0.254	
0.414			0.172			0.464			0.072		
0.632		0.050				1.0		0			
1.0	0					(1.896)	(0.101)				



Algunas de estas relaciones son ilustradas en el gráfico 9. Para un cierto valor de L_m , por ejemplo, 05, la ecuación (5) indica el valor D_m mínimo, que dará a los campesinos un ingreso de subsistencia. Supóngase que esta cantidad de tierra genera la curva del producto marginal AB en el gráfico 9, siendo el beneficio de la hacienda CDEH. Para este valor de L_m , cualquier cantidad mayor de tierras elevará el ingreso del campesino por encima del nivel de subsistencia y también reducirá el beneficio de la hacienda. Ajeno a la forma de la función de producción, el beneficio de la hacienda es maximizado al nivel de subsistencia; a esta maximización de los beneficios, los valores de D_m y w están determinados independientemente de la curva del producto marginal de la hacienda, H, tal y como lo ilustran los cálculos de la tabla 3. (Ver pág. 52).

Si se escoge un valor de L_m más elevado, por ejemplo, 0.6, entonces un valor invariable de D_m causará que el ingreso total del campesino disminuya bajo el nivel de subsistencia por la cantidad CDD'C'. Pero esto no sucederá, y entonces D_m debe ser aumentado para restablecer el nivel del ingreso de subsistencia. Sin embargo, el aumento en D_m no puede ser tan grande como para establecer los salarios de la hacienda a O'C, porque entonces el ingreso del campesino excedería al de subsistencia. Por lo tanto, como se ha demostrado en la tabla 3, en que L_m aumenta, D_m también debe aumentar y w disminuir.

Empezamos esta sección del Apéndice, con una preocupación acerca de las restricciones al proceso de maximización que toma la forma de diferencias (*inequalities*). ¿Han sido eliminados tales problemas? La posibilidad de

Tabla 3

Valores de D_m y w para L_m y α

	D_m		w	
	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$
$L_m = 0$	0	0	1.0	1.0
0.1	0.331	0.277	0.909	0.968
0.2	0.556	0.488	0.833	0.938
0.3	0.710	0.648	0.769	0.909
0.4	0.816	0.766	0.714	0.882
0.5	0.889	0.853	0.667	0.857
0.6	0.938	0.914	0.625	0.833
0.7	0.969	0.956	0.588	0.811
0.8	0.988	0.982	0.556	0.789
0.9	0.997	0.996	0.526	0.769
1.0	1.0	1.0	0.5	0.75
beneficio máximo				
0.264	0.661		0.791	
0.414	0.829		0.704	
0.632	0.949		0.613	
0.099		0.275		0.968
0.464		0.825		0.866

valores negativos para el producto marginal del minifundio y para el salario de la hacienda, fue evitada al elegir especialmente la función de la producción. La posibilidad de dar soluciones que incluyan valores de L_m menores del 0% o mayores del 100% fue evitada simplemente mediante la imposición de soluciones angulares después de inspeccionar los resultados de numerosas combinaciones de H y α . La posibilidad de soluciones que incluyan un ingreso total del campesino, mayor que el de subsistencia, *para una cierta cantidad de la tierra del minifundio* (D_m), aún no se ha tratado directamente. Más bien, el problema ha sido evadido al maximizar los beneficios para una determinada fuerza de trabajo del minifundio, en vez de para una cierta cantidad de tierras. La diferencia en estas aproximaciones también se encuentra ilustrada en el gráfico 9.

En el caso en que $L_m = 0.5$, CDEH es el máximo beneficio para un valor de L_m , pero no necesita serlo para el valor de D_m asociado. Más bien, el beneficio puede ser maximizado a C'D'E'H, con el ingreso del campesino

por encima del nivel de subsistencia, y reducido el valor de L_m a 0.4. Sin embargo, el resultado de este beneficio en particular no aparece en nuestras curvas, relacionando π a L_m , porque para que $L_m = 0.4$, los beneficios serían maximizados, por ejemplo, serían mayores que C'D'E'H, y a un nivel inferior a D_m .

La tabla 4 y el gráfico 10 relacionan el beneficio directamente con la cantidad de tierra del minifundio, en dos casos: cuando se requiere que el ingreso del campesino permanezca siempre a nivel de subsistencia, y cuando solamente se necesita que no caiga por debajo de dicho nivel. Para el último caso, se calculó el beneficio de la hacienda sin una reducción del nivel de subsistencia. sustituyendo la ecuación (2a) por la función del beneficio, resultando:

$$(9) \quad \pi = (H - \alpha D_m^{1-\alpha} L_m^{\alpha-1}) (1 - L_m)$$

Entonces, el beneficio fue maximizado con respecto a L_m , para un cierto valor de D_m , al establecer el derivado parcial de L_m igual a cero. Esto dio:

$$(10) \quad \alpha^2 D_m^{1-\alpha} L_m - H L_m^{2-\alpha} + \alpha (1 - \alpha) D_m^{1-\alpha} = 0.$$

Una vez resuelta la ecuación (10) por L_m , el resultado fue insertado en la ecuación (9), a fin de producir los estimados de los beneficios no reducidos en la tabla 4. Sin embargo, dichos estimados son reproducidos solamente en los casos en que el ingreso asociado del campesino era mayor o igual al de subsistencia. En los casos en que el ingreso era menor que el de subsistencia, la reducción de ésta estaba ligada a la reducción del beneficio, lo que resultaba relevante.

Las cifras de la tabla 4 muestran que para un cierto valor de D_m , rinde pagar el salario de subsistencia cuando D_m y H son altos. Cuando D_m es alto, el reducir al campesino a nivel de subsistencia significa disminuir la paga de la hacienda, a tal punto que la fuerza laboral de ésta virtualmente desaparece. Cuando H es alta, la mano de obra es tan valiosa a la hacienda que es preferible ofrecer un salario elevado, que el ingreso se encuentre por encima del de subsistencia. (Ver págs. 54 y 55).

En el gráfico 10, las curvas de trazo corrido relacionan los beneficios con la extensión de la tierra cuando se da la reducción al nivel de subsistencia, y las líneas entrecortadas muestran el cambio que se produce al utilizar la solución contraria. Es necesario enfatizar que en toda solución no constructiva que implique que el ingreso del campesino sea mayor que el de subsistencia, siempre existirá la posibilidad de aumentar los beneficios, aun mediante la reducción de la extensión de tierras, D_m . Por tanto, la nueva curva introducida por la solución no constructiva sólo puede existir cuando ambas curvas tengan una pendiente negativa, y nunca en el máximo de los beneficios.

Tabla 4

Beneficio (π) relacionados al minifundio (D_m) con y sin las restricciones de subsistencia ($\alpha = 0.05$)

H =	0.75				1.0				1.25				2.0			
	Restringidas		No restringidas		Restringidas		No restringidas		Restringidas		No restringidas		Restringidas		No restringidas	
	L_m	π	L_m	π	π	L_m	π	π	L_m	π	L_m	π	π	L_m	π	
(all H values)																
$D_m = 0$	0	-0.25	*	*	0	*	*	0.25	*	*	1.0	*	*			
	0.331	0.1	-0.143	*	*	0.082	*	*	0.307	*	*	0.982	*	*		
	0.556	0.2	-0.067	*	*	0.133	*	*	0.333	*	*	0.933	*	*		
	0.710	0.3	-0.013	*	*	0.162	*	*	0.337	*	*	0.862	0.261	0.869		
	0.816	0.4	0.021	*	*	0.171	*	*	0.321	0.4	0.321	0.771	0.275	0.825		
	0.889	0.5	0.042	*	*	0.167	0.5	0.167	0.292	0.414	0.303	0.667	0.284	0.799		
	0.938	0.6	0.050	*	*	0.150	0.512	0.158	0.250	0.424	0.292	0.550	0.290	0.782		
	0.969	0.7	0.049	0.670	0.049	0.124	0.519	0.152	0.199	0.429	0.285	0.424	0.294	0.771		
	0.988	0.8	0.039	0.676	0.047	0.089	0.523	0.149	0.139	0.433	0.281	0.289	0.296	0.765		
	0.997	0.9	0.023	0.679	0.046	0.047	0.525	0.148	0.072	0.435	0.279	0.147	0.297	0.762		
	1.0	1.0	0			0										

* Significa que la solución no restringida fue rechazada porque $S < 1.0$.

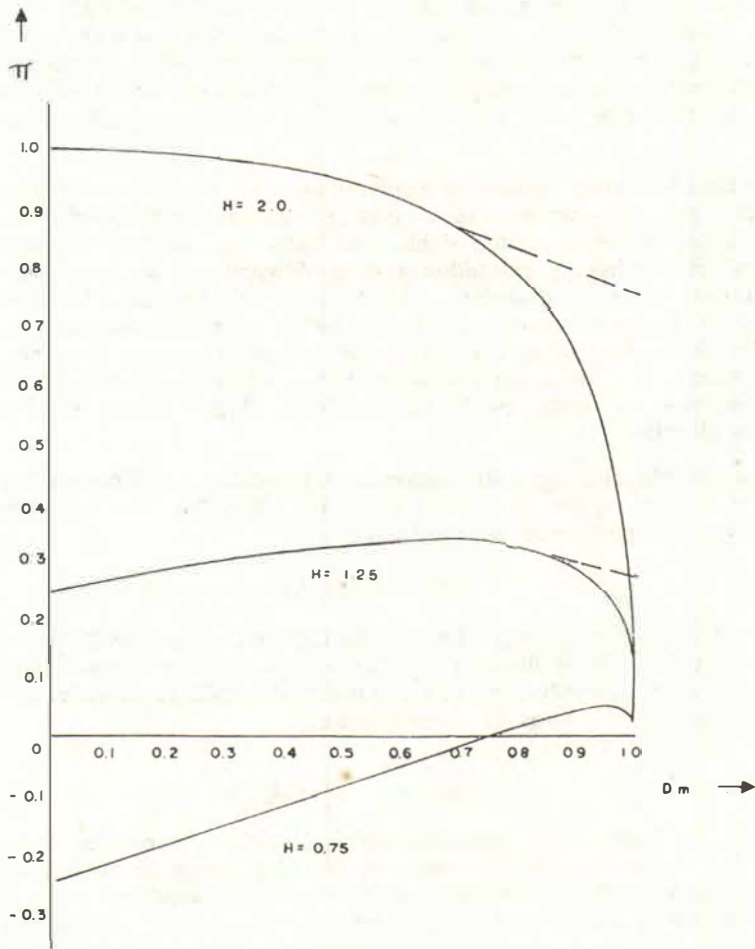


Gráfico 10

3. El proceso maximizador de los arrendires en La Convención

Los arrendires (arrendatarios) en el valle de La Convención entregaron parte de sus tierras a los allegados (sub-arrendatarios), a cambio de lo cual estos acordaron asumir las obligaciones de trabajo de los arrendires con los hacendados del valle. Así, quedaba libre el tiempo de los arrendires, para poderlo dedicar a una actividad más lucrativa: el cultivo del café. El problema de maximización que queremos considerar es: ¿De qué manera los arrendires establecen mejor los términos del contrato de subarrendamiento, para así poder maximizar sus propios ingresos? Estos términos se refieren al tamaño de las parcelas y a las obligaciones de trabajo asociadas a cada parcela.

Para simplificar el problema, supongamos que los arrendires desean que los allegados provean exactamente la misma cantidad de prestaciones laborales gratuitas que el arrendire debía a la hacienda. Es decir los arrendires quieren ser totalmente relevados a esta obligación y no pretenden exigir prestaciones laborales gratuitas adicionales a los allegados. Examinaremos el proceso maximizador de un solo arrendire. Si suponemos que todas las parcelas de los arrendires son iguales en extensión, y que todos los arrendires ofrecen las mismas condiciones a los allegados, nuestros resultados serán puestos en nueva escala para reflejar el proceso de maximización en todo el valle.

En la anotación que sigue, los signos en mayúsculas se refieren a los arrendires, y los que están en minúsculas a los allegados. Las relaciones que se han de considerar son las siguientes:

$$(1) \quad Q = f(D, L)$$

Esta es una función de la producción del café, que relaciona la tierra (D) y el trabajo (L) con la producción (Q). La función se aplica tanto a los arrendires como a los allegados, ya que el cultivo del café es la única actividad agrícola de ambos grupos de arrendatarios.

$$(2) \quad D_A = D - nD_a$$

La tierra empleada por el arrendire para el cultivo del café equivale al total de las tierras controladas por éste, menos el total de la tierra que ha puesto en manos de los allegados, en la que el total equivale a la extensión de sus parcelas, multiplicado por el total de las parcelas de los allegados.

$$(3) \quad L_H = nL_a = n(L_t - L_a)$$

La obligación de trabajo del arrendire para la hacienda equivale a la que requiere de cada allegado, multiplicada por el número total de allegados, considerando que hay uno en cada parcela. A su vez, la obligación de servicios laborales del allegado equivale a su tiempo de trabajo total, menos el que pueda dedicar a su propia producción de café.

$$(4) \quad Q_a = f(D_a, L_a) = \bar{S}$$

El ingreso obtenido por el allegado en la producción de café, que en realidad constituye su ingreso total, está fijado de acuerdo al salario local, y puede o no equivaler al de subsistencia. Esto supone una cantidad ilimitada de mano de obra, infinitamente elástica, para fijar el salario.

$$(5) \quad L_A = \bar{L}_T$$

El arrendire dedica el total de su tierra de trabajo a la producción del café.

Al operar entre los límites de las ecuaciones (1) y (5) el arrendire pretende maximizar su ingreso proveniente del café, Q_A :

$$(6) \quad \begin{aligned} \text{Max } Q_A &= f(D_A, L_A) \\ &= f\left[\bar{D} - nD_a, \bar{L}_T\right] \end{aligned}$$

Sujeto a la reducción obtenida al sustituir (3) por (4):

$$(7) \quad f\left[D_a, \left(\bar{L}_T - \frac{\bar{L}_H}{n}\right)\right] - \bar{S} = 0$$

Los términos contractuales que pueden ser impuestos por el arrendire incluyen el tamaño de la parcela D_a , y la obligación de trabajo L_h . Sin embargo, indirectamente, puede imponer otros a través de la venta de un número de parcelas n , en vista de que nL_h equivale a la constante \bar{L}_H . Por lo tanto, el *optimum* del arrendire es obtenido al maximizar con respecto a D_a y n la expresión de Lagran:

$$(8) \quad \begin{aligned} Q_A^* &= f\left[\left(\bar{D} - nD_a\right), L_T\right] + \\ &+ \lambda \left\{ f\left[D_a, \left(\bar{L}_T - \frac{\bar{L}_H}{n}\right)\right] - \bar{S} \right\} . \end{aligned}$$

$$(9) \quad \frac{\partial Q_A^*}{\partial D_a} = f_{D_A}(-n) + \lambda F_{D_a} = 0$$

$$(10) \quad \frac{\partial Q_A^*}{\partial n} = f_{D_A}(-D_a) + \lambda F_{L_a}\left(\frac{\bar{L}_H}{n^2}\right) = 0$$

$$(11) \quad \frac{\partial Q_A^*}{\partial \lambda} = f\left[D_a, \left(\bar{L}_T - \frac{\bar{L}_H}{n}\right)\right] - \bar{S} = 0$$

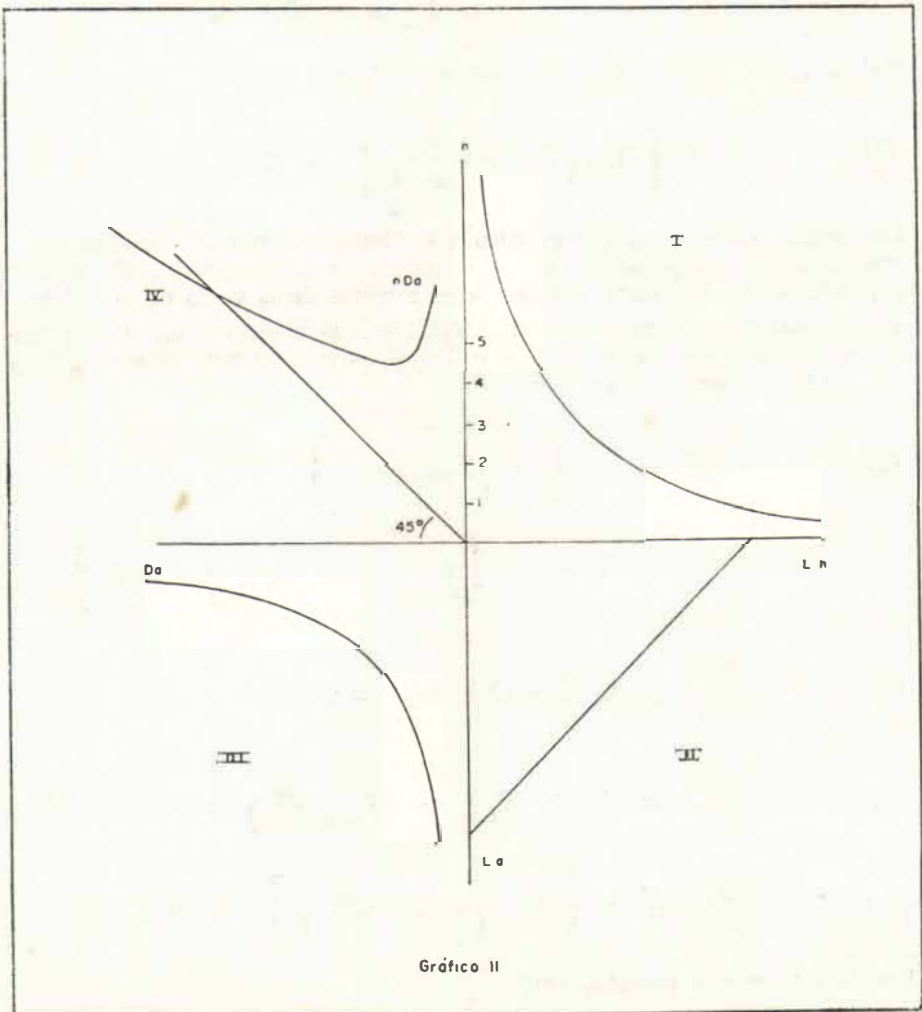
En vista de que la ecuación (2):

$$(12) \quad f_{D_A} = \frac{\partial Q}{\partial D_A} = \frac{\partial Q}{\partial D_a} \cdot \frac{dD_a}{dD_A} = f_{D_a} \left(-\frac{1}{n} \right)$$

Entonces de (9), $= \lambda - 1$. Sustituyendo ésta y la (12) por la (10), y reordenando obtenemos:

$$(13) \quad n f_{D_a} D_a = f_{L_a} \bar{L}_H$$

Dicho en palabras, esta condición señala que el valor de la tierra cedida por el arrendire (nD_a), debe equivaler al valor de los servicios laborales adquiridos (\bar{L}_H), cuando ambos valores son establecidos en términos de la productividad marginal de los factores respectivos.



La naturaleza del *optimum* del arrendire es representada mediante un diagrama en el gráfico 11¹⁰⁰. Empezando con el Cuadrante I, la relación entre n y L_n es una hipérbola de la ecuación (3). La relación lineal entre L_h y L_a en el Cuadrante II también viene de la ecuación (3), por ejemplo, L_h más L_a equivale a la constante \bar{L}_r . El cuadrante III muestra la isocuanta que equivale al salario acordado, \bar{S} . El Cuadrante IV, que relaciona D_a con nD_a , es derivado de los otros cuadrantes. Esto se logra con más facilidad si se empieza con los valores enteros de n y se siguen las curvas hasta llegar a los valores correspondientes a D_a , sino que también es equivalente a las distancias verticales a la línea de 45°. Esta distancia vertical es entonces multiplicada por el valor original de n para producir la curva expuesta. El *optimum* del arrendire se encuentra en la máxima depresión de la curva del Cuadrante IV, en que nD_a se encuentra al mínimo.

Considérese un aumento incrementado en n . Según el Cuadrante I

$$(14) \quad \frac{\Delta L_h}{\Delta n} = \frac{-L_h}{n^2}$$

Entonces según el Cuadrante II:

$$(15) \quad \frac{\Delta L_a}{\Delta n} = \frac{\Delta L_a}{\Delta L_h} \cdot \frac{\Delta L_h}{\Delta n} = (-1) \frac{(-L_h)}{n^2} = \frac{\bar{L}_H}{n^2}$$

Llevando la isocuanta al Cuadrante III, tenemos:

$$(16) \quad f_{L_a} \Delta L_a = f_{D_a} (-\Delta D_a)$$

Entonces:

$$(17) \quad \frac{\Delta D_a}{\Delta n} = - \frac{f_{L_a}}{f_{D_a}} \frac{\Delta L_a}{\Delta n} = - \frac{f_{L_a}}{f_{D_a}} \cdot \frac{\bar{L}_H}{n^2}$$

Finalmente, dado que:

$$(18) \quad \frac{\Delta (nD_a)}{\Delta n} = D_a + n \frac{\Delta D_a}{\Delta n}$$

Entonces, en la máxima depresión en el Cuadrante IV:

$$(19) \quad \frac{\Delta (nD_a)}{\Delta n} = 0 = D_a - n \frac{f_{L_a}}{f_{D_a}} \cdot \frac{\bar{L}_H}{n^2}$$

100. Estoy agradecido a Lawrence White por su sugerencia de la línea de análisis contenida en el cuadro 11.

O:

$$(20) \quad nf_{D_a} D_a = f_{L_a} \bar{L}_H,$$

que equivale a la condición maximizadora de la ecuación (13).

¿Cuántos allegados desea contratar el arrendire? Para simplificar el resultado, se asume en términos generales, que:

$$(21) \quad \bar{S} = 1.0$$

$$(22) \quad \bar{L}_T = 1.0$$

$$(23) \quad \bar{L}_H = K\bar{L}_T$$

y con una cierta pérdida del carácter general, se asume que:

$$(24) \quad Q_a = L_a^\alpha D_a^{1-\alpha}$$

$$(25) \quad \bar{L}_T = 1.0$$

Entonces, al recorrer nuevamente los cuadrantes, obtendremos:

$$(26) \quad nL_h = K$$

$$(27) \quad L_a + L_h = 1.0$$

$$(28) \quad L_a^\alpha D_a^{1-\alpha} = 1.0$$

Sustituyendo las ecuaciones (26) y (27) por la (28), resulta:

$$(29) \quad \left(1 - \frac{k}{n}\right)^\alpha D_a^{1-\alpha} = 1$$

$$(30) \quad D_a = \frac{1}{\left(1 - \frac{K}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

El total de las tierras cedidas a los allegados, nD_a , es por lo tanto:

$$(31) \quad nD_a = \frac{n}{\left(1 - \frac{K}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

Para hallar n que reduce la tierra cedida y que por lo tanto maximiza el ingreso del arrendire, establecemos el derivado respecto de n igual a cero. Ej.:

$$(32) \quad \frac{1 - n \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left(1 - \frac{K}{n}\right)^{-1} \frac{K}{n^2}}{\left(1 - \frac{K}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1 - \alpha}}}$$

que se simplifica en:

$$(33) \quad n = \frac{1}{1 - \alpha} K$$

En vista de que los estudios estadísticos de las funciones de producción generalmente rinden valores de n entre 0.5 y 0.75, concluimos que el número de allegados por arrendire parece de dos a cuatro veces la parte del tiempo de trabajo total que éste debía contractualmente a la hacienda.

Respecto a los contratos de los arrendires con las haciendas, Craig concluye:

"Parece que hubo una amplia variedad entre las haciendas del valle, con respecto al número total de días por mes que un arrendatario indígena debía trabajar para el hacendado. El promedio sería de 10 a 14 días pero en ocasiones éste se elevó de 20 a 25 días"¹⁰¹.

Hobsbawn, citando una serie de fuentes, nos habla de las obligaciones de trabajo sobre una base más amplia¹⁰², pero el resultado final fue el mismo aproximadamente. La hacienda requería algo menos que la mitad del tiempo de trabajo del arrendire, alrededor del 40%. Según las hipótesis planteadas aquí, se sugiere que la proporción de allegados a arrendires debe estar entre el 0.8 y el 1.6. Hobsbawn también da algunos datos en base a estas hipótesis, según fueron establecidas por Kuczynski-Godard en la década de 1940¹⁰³:

Hacienda San Lorenzo: 33 arrendires, 39 allegados

Hacienda Chancamayo: 41 arrendires, 57 allegados

Hacienda Echarte: ca. 70 arrendires, cada uno con 3 a 10 allegados.

Las proporciones de las dos primeras haciendas (1.18 y 1.39 respectivamente) corresponden claramente a la predicción del modelo; en el caso de la tercera, algún error mío en las suposiciones, siendo muy factible que éste se encuentre en el hecho de que el allegado prestara sus servicios laborales sólo en la hacienda. Se sospecha que aquellos arrendires que contaban con más de 10 allegados, se estaban beneficiando con servicios laborales gratuitos en sus propias tierras, y por lo tanto, se auto-establecieron como *hacendaditos* (sic).

101. Craig 1969, p. 279; cita las encuestas de la década de 1930, realizadas por Cuadros y Villena, 1949.

102. Hobsbawn 1969, págs. 39-40.

103. Hobsbawn 1969, pág. 41, citando a Kuczynski-Godard, 1946a.

BIBLIOGRAFIA

- ALBERTI, Giorgio
1970 "Los movimientos campesinos", en Robert Keith y otros. *La hacienda, la comunidad y el campesino en el Perú*. Instituto de Estudios Peruanos, Perú Problema N° 3, págs. 164-213. Lima.
- ARQUINIO, José y otros
1966 *Sociedad, cultura y economía en 10 áreas andino-peruanas: Asillo, Chumbao, Chuyao-Huaychao...* Instituto Indigenista Peruano, Serie Monográfica N° 17, octubre, Lima.
- BARDHAN, P. K. y T. N. SRINIVASAN
1971 "Cropshoring Tenancy in Agriculture: A Theoretical and Empirical Analysis". En *American Economic Review*, marzo, págs. 48-64.
- BECKFORD, George L.
1972 *Persistent Poverty. Underdevelopment in Plantation Economies of the Third World*. New York, Oxford University Press.
- BERRY, R. Albert
1971 "Land Distribution, Income Distribution, and the Productive Efficiency of Colombian Agriculture". Economic Growth Center Discussion, Paper N° 108, (mimeo), Yale University, marzo 20.
- BEST, Lloyd
1968 "Outlines of a model of Pure Plantation Economy". *Social and Economic Studies*, setiembre, págs. 283-326.
- BOTTOMLEY, Anthony
1966 "Monopolistic Rent Determination in Underdeveloped and Rural Areas". *Kyklos*, fasc. 1, págs. 106-117.
- BOURRICAUD, François
1970 *Power and Society in Contemporary Peru*. New York, Praeger.
- CASTRO POZO, Hildebrando
1947 *El yanacónaje en las haciendas piuranas*. Lima.
- CHUNG, Steven N. S.
1969 *The Theory of Share Tenancy*. University of Chicago Press.
- CHEVALIER, François
1963 *Land and Society in Colonial Mexico. The Great Hacienda*. Berkeley, University of California Press.
- CLINE, William R.
1970 *Economic Consequences of a Land Reform in Brazil*. Amsterdam, North Holland Publishing Company.
- COMITE INTERAMERICANO DE DESARROLLO AGRICOLA (CIDA)
1966a *Tenencia de la tierra y desarrollo socio-económico del sector agrícola: Chile*. Pan American Union, Washington.
1966b *Tenencia de la tierra y desarrollo socio económico del sector agrícola: Colombia*. Pan American Union, Washington.
1966c *Tenencia de la tierra y desarrollo socio-económico del sector agrícola: Perú*. Pan American Union, Washington.
- CONRAD, Alfred y John MEYER
1964 *The Economics of Slavery*. Chicago, Aldine Publishing Company.

- COTLER, Julio y Felipe PORTOCARRERO
 1970 "Haciendas y comunidades tradicionales en un contexto de movilización política". En Robert Keith y otros. *La hacienda, la comunidad y el campesino en el Perú*. Instituto de Estudios Peruanos, Perú Problema N° 3, págs. 135-163. Lima.
- CRAIG, Wesley W., Jr.
 1969 "Peru: The Peasant Movement of La Convención". En Henry A. Landsberger, editor. *Latin American Peasant Movements*. Ithaca, Cornell University Press, págs. 274-296.
- CUADROS Y VILLENA, Carlos
 1949 "El arriendo y la reforma agraria en la provincia de La Convención". En *Revista Universitaria*, Vol. 38, N° 96, Cuzco.
- DAX, Paul
 1967 "The Latin American Latifundium— A Theoretical Approach". Unpublished Senior Thesis, Woodrow Wilson School, Princeton University.
 1971 "The Plot Plantation System and the Theory of Land Tenure". Unpublished Ph. D. Dissertation, Department of Economics. Columbia University.
 1972 "The Latin American *Hacienda*— Minifundio System: A Theoretical Approach", (mimeo).
- DOMAR, Evsey
 1970 "The Causes of Slavery or Serfdom: A Hypothesis". *Journal of Economic History*, págs. 18-32, marzo.
- FAVRE, Henri
 1964 "Evolución y situación de las haciendas en la región de Huancavelica". En *Revista del Museo Nacional*, Vol. 33, 1964, págs. 237-257. Reimpreso en Henri Favre y otros. *La hacienda en el Perú*. Instituto de Estudios Peruanos, 1967. Lima.
- FLORESCANO, Enrique
 1969 *Precios del maíz y crisis agrícolas en México (1708-1810)*. El Colegio de México.
- GRIFFIN, Keith
 1969 *Underdevelopment in Spanish America*. London, George Allen y Unwin.
- GUERRA Y SANCHEZ, Ramiro
 1964 *Sugar and Society in the Caribbean*. New Haven, Yale University Press. Azúcar y población en las Antillas, La Habana, 1927.
- HANSON, James
 1972 "Agricultural Productivity and the Distribution of Land: The Venezuela Case". Economic Growth Center Discussion Paper N° 148 (mimeo), Yale University, June.
- HIRSCHMAN, Albert O.
 1963 *Journeys Toward Progress*. New York, Twentieth Century Fund.
- HOBSBAWN, Eric J. E.
 1969 "A Case of Neo-Feudalism: La Convención Peru". *Journal of Latin American Studies*, págs. 31-50, marzo.
- INTERNATIONAL Bank for reconstruction and development
 1950 *The Basis of a Development Program for Colombia*. Washington.
- KEITH, Robert G.
 1970 "Origen del sistema de hacienda. El caso de Chancay". En Robert Keith

- y otros. *La hacienda, la comunidad y el campesino en el Perú*. Instituto de Estudios Peruanos, Perú Problema N° 3, págs. 13-60. Lima, 1971
- "Encomienda, Hacienda and Corregimiento in Spanish America: A Structural Analysis". En *Hispanic American Historical Review*, agosto págs. 431-446.
- KLAREN, Peter F.
1970 *La formación de las haciendas azucareras y los orígenes del APRA*. Instituto de Estudios Peruanos, Perú Problema N° 5, Lima.
- KUBLER, George
1946 "The Quechua in the Colonial World". En Julian Steward, editor. *Hand-Book of South American Indians*, Vol. II. Smithsonian Institution, Bureau of American Ethnology, Bulletin N° 143, Government Printing Office, págs. 331-410, Washington.
- KUCZYNSKI-GODARD, Maxime H.
1946a *A propósito del saneamiento de los valles yungas del Cuzco*. Lima (?)
1946b "Un latifundio del sur— Una contribución al conocimiento del problema social". En *América Indígena*, Vol. VI, N° 3, julio, págs. 257-274.
- LOCKHARDT, James
1969 "Encomienda and Hacienda: The Evolution of Great Estate in the Spanish Indies". En *Hispanic American Historical Review*, págs. 411-429, agosto.
- MACERA, Pablo
1971 "Feudalismo colonial americano: El caso de las haciendas peruanas". En *Acta Histórica*, Szeged, Hungary, Vol. 35, págs. 3-43.
- MARX, Karl
1867 *Capital*. Vol I; "The Process of Capitalist Production". New York, International Publishers.
- MATOS MAR, José
1964a "Las haciendas del valle de Chancay". En *Revista del Museo Nacional*, Vol. 33, págs. 282-395. Reimpreso en Henri Favre y otros. *La hacienda en el Perú*. Instituto de Estudios Peruanos, 1967. Lima.
1964b "El valle de Yanamarca". En *Revista del Museo Nacional*, Vol. 33, págs. 128-232. Separata publicada por la Universidad Mayor de San Marcos, departamento de Antropología, Publicación N° 18.
- McBRIDE, George M.
1923 *The Land Systems of Mexico*. American Geographical Society, New York.
- MILLER, Solomon
1967 "Hacienda to Plantation in Northern Peru: The Processes of Proletarianization of a Tenant Farmer Society". En Julián H. Steward, editor. *Contemporary Change in Traditional Societies*, Vol. III. Urbana, University of Illinois Press, págs. 133-225.
- MORNER, Magnus
1970 "A Comparative Study of Tenant Labor in Parts of Europe, Africa and Latin America, 1700-1900: A Preliminary Report of a Research Project in Social History". *Latin American Research Review*, verano, págs. 3-15.
- NORTH, Douglass C. y Robert Paul THOMAS
1971 "The Rise and Fall of the Memorial System: A Theoretical Model". *Journal of Economic History*, págs. 777-803, diciembre.
- OI, Walter Y. y Elizabeth M. CLAYTON
1968 "A Peasant's View of a Soviet Collective Farm". En *American Economic Review*, págs. 37-29, marzo.

- PIEL, Jean
1967 "A propos d'un soulèvement rural péruvien au debut du vingtième siècle: Tocroyoc (1921)". En *Revue d'Histoire Moderne et Contemporaine*, oct.-dic. págs. 375-405.
- POBLETE TRONCOSO, Moisés
1938 *Condiciones de vida y de trabajo de la población indígena del Perú*. Ginebra, Oficina Internacional de Trabajo.
- QUIJANO, Aníbal
1965 "El movimiento campesino del Perú y sus líderes". En *América Latina*, págs. 43-64, oct.-dic.
- RAGATZ, Lowel Joseph
1928 *The Fall of the Planter Class in the British Caribbean, 1763-1833*. New York. The Century Co.
- RANSOM, Roger L. y Richard SUTCH
1972a "Debt Peonage in the Cotton South after the Civil War". En *Journal of Economic History*, págs. 641-669, setiembre.
1972b "The Ex-Slave in the Post-Bellum South: A Study of the Impact of Racism in a Market Context" (mimeo). University of California, Riverside and Berkeley.
- RAVINES, Eudocio
1951 *The Yanan Way*. Charles Scribner's Sons, New York.
- REID, Joseph D., Jr.
1972 "Sharecropping as an Understandable Market Response in the Post-Bellum South", (mimeo) University of Pennsylvania.
- RODRIGUEZ PASTOR, Humberto
1969 *Caqui: estudio de una hacienda costeña*. Estudios del valle de Chancay, N° 9. Instituto de Estudios Peruanos, agosto, Lima.
- ROWE, John Howland
1957 "The Incas Under Spanish Colonial Institutions". En *Hispanic American Historical Review*, págs. 155-191, mayo.
- SAENZ, Moisés
1933 *Sobre el indio peruano y su incorporación al medio nacional*. México. Publicaciones de la Secretaría de Educación Pública.
- SEN, A. K.
1966 "Peasants and Dualism with or without Surplus Labor". En *Journal of Political Economy*, págs. 425-450, octubre.
- SAHPLEY, L. S. y Martin SHUBIK
1967 "Ownership and the Production Function". En *Quarterly Journal of Economics*, págs. 88-111, febrero.
- TANNENBAUN, Frank
1929 *The Mexican Agrarian Revolution*. The Macmillan Company, New York.
1962 *Ten Keys to Latin America*. Alfred A. Knopf, New York.
- TAYLOR, Paul S.
1954 "Plantation Agriculture in the United States: Seventeenth to Twentieth Centuries". *Land Economics*, págs. 141-152, mayo.
- TULLIS, F. La Mond
1970 *Lord and Peasant in Peru*. Harvard University Press, Cambridge.

- TURNER, John Kenneth
1910 *Barbarous Mexico*. Chicago.
- VASQUEZ, Mario
1961 *Hacienda, peonaje y servidumbre en los Andes Peruanos*. Lima, Editorial Estudios Andinos.
- WEBB, Richard
1972 "The Distribution of Income in Peru". Research Program in Economic Development Discussion Paper N° 26, Princeton University, setiembre, (mimeo).
- WOLF, Eric R. y Sidney W. MINTZ
1957 "Haciendas and Plantations in Middle America and the Antilles". En *Social and Economic Studies*, págs. 380-412, setiembre.
- WOMACK, John
1969 *Zapata and the Mexican Revolution*. Knopf, New York.
- ZAVALA, Silvio
1940 *De encomiendas y propiedad territorial en algunas regiones de la América Española*. México.
1943 *New Viewpoints on the Spanish Colonization of America*. Philadelphia, University of Pennsylvania Press.
1944 "Orígenes coloniales del peonaje en México". En *El trimestre económico*, enero-marzo, págs. 711-748.